

PEMODELAN STATISTIK

HUBUNGAN DEBIT DAN KANDUNGAN SEDIMEN SUNGAI

Contoh Kasus di Das Citarum – Nanjung

Oleh : Mardi Wibowo *)

Abstrak

Kandungan sedimen menunjukkan konsentrasi zat padat yang tersuspensi dalam air. Untuk mengukur kandungan sedimen diperlukan peralatan khusus, relatif sulit, lama dan perlu biaya, sedangkan data debit sungai jauh lebih mudah diukur dan merupakan data yang selalu tersedia di tiap aliran sungai. Oleh karena itulah perlu dicari hubungan antara debit air sungai dengan kandungan sedimen dalam air sungai. Sehingga dengan adanya data pengukuran debit sungai tanpa ada pengukuran kandungan sedimen dapat diperkirakan kandungan sedimen dalam air sungai tersebut dengan cepat dan murah.

Hubungan antara debit dengan kandungan sedimen untuk data DAS Citarum - Nanjung pada bulan Maret 1998 adalah : dengan analisis regresi eksponensial : $Y = 0.7379 e^{0.0332 X}$ dengan : koefisien korelasi (R) = 0.978 dan kesalahan baku perkiraan (SEY) = ± 1.25 juta m^3 /hari; dengan analisis regresi berpangkat : $Y = 6.7655.10^{-4} X^{2.2644}$ dengan : koefisien korelasi (R) = 0.985 dan kesalahan baku perkiraan (SEY) = ± 1.20 juta m^3 /hari.

Berdasarkan nilai koefisien korelasi dan nilai kesalahan baku perkiraan, maka analisis regresi berpangkat lebih sesuai dibandingkan dengan analisis regresi eksponensial untuk data kasus hubungan debit dan kandungan sedimen di DAS Citarum - Nanjung, Maret 1998.

Katakunci : kandungan sedimen, regresi eksponensial, regresi berpangkat.

1. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Kandungan sedimen (sering disebut sebagai kekeruhan air sungai) merupakan parameter yang sangat penting dalam penentuan kualitas air sungai. Kandungan sedimen ini menunjukkan konsentrasi zat padat yang tersuspensi dalam air sungai. Salah satu kegunaan utama dengan diketahuinya kandungan sedimen ini adalah untuk mengetahui air sungai tersebut dapat dimanfaatkan untuk keperluan apa saja, juga untuk memperkirakan kecepatan proses pendangkalan waduk atau muara sungai (dapat untuk memperkirakan umur waduk).

Untuk pengukuran kandungan sedimen diperlukan peralatan khusus, relatif sulit, lama dan perlu biaya, sedangkan data debit sungai jauh lebih mudah diukur dan merupakan data yang selalu tersedia di tiap aliran sungai. Oleh karena itulah perlu dicari hubungan antara debit air sungai dengan kandungan sedimen dalam air sungai. Sehingga dengan adanya data pengukuran

debit sungai tanpa ada pengukuran kandungan sedimen dapat diperkirakan kandungan sedimen dalam air sungai tersebut dengan cepat dan murah.

Analisis regresi dan korelasi saat ini sudah banyak dikembangkan dan diaplikasikan dalam berbagai permasalahan. Analisis ini khususnya dikembangkan untuk mengkaji dan mengukur keterkaitan secara statistik antara dua variabel atau lebih.

1.2. Maksud dan Tujuan

Mengetahui hubungan antara debit sungai dan kandungan sedimen dalam air sungai di DAS Citarum – Nanjung, dengan menghitung koefisien korelasi dan kesalahan baku perkiraan berdasarkan analisis regresi eksponensial maupun analisis regresi berpangkat serta mengetahui perbandingan hasil kedua analisis regresi tersebut di atas.

1.3. Analisis Regresi dan Korelasi

Analisis regresi dan korelasi dikembangkan untuk mengkaji dan mengukur

*) Peneliti di Pusat Pengkajian dan Penerapan Teknologi Lingkungan - BPPT

keterkaitan/ hubungan secara statistik antara dua variabel/ lebih. Hubungan yang didapat biasanya dinyatakan dalam bentuk persamaan matematik. Dalam analisis regresi, suatu persamaan yang berperan untuk untuk menaksir dikembangkan untuk menjelaskan pola atau sifat fungsional keterkaitan antara variabel. Variabel yang akan ditaksir disebut variabel tak bebas dan biasanya diplotkan dalam sumbu Y, sehingga dituliskan dengan simbol Y.

Variabel yang mempengaruhi perubahan pada variabel tak bebas disebut variabel bebas dan diplotkan pada sumbu X, sehingga dituliskan dengan simbol X. Analisis korelasi bertujuan untuk mengukur kekuatan atau derajat hubungan antara variabel tersebut. Dengan kata lain analisis regresi ingin menjawab : "Bagaimana pola keterkaitan antar variabel tersebut", sedangkan analisis korelasi ingin menjawab ; "Berapa kekuatan keterkaitan tersebut terjadi". Hasil analisis korelasi dinyatakan secara kuantitatif sebagai koefisien korelasi.

Berdasarkan nilai koefisien korelasi hubungan antara 2 variabel dapat dinyatakan sebagai berikut ⁽¹⁾ :

Tabel 1. Nilai koefisien korelasi dan kekuatan hubungan antar variabel

Nilai Koefisien Korelasi	Keterangan
1	hubungan positif sempurna
0.6 - 1	hubungan langsung positif baik
0 - 0.6	hubungan langsung positif lemah
0	tidak terdapat hubungan linier
-0.6 - 0	hubungan langsung negatif lemah
-1 - -0.6	hubungan langsung negatif baik
-1	hubungan negatif sempurna

Langkah awal analisis regresi dan korelasi adalah menentukan data yang menjadi variabel bebas dan tak bebas, kemudian menentukan bentuk kurva dan persamaan yang cocok dengan sebaran data dan melakukan interpolasi nilai variabel tak bebas berdasarkan nilai variabel bebas yang telah diketahui.

1.4. Model Regresi Linier Sederhana

Bentuk umum model regresi linier sederhana adalah berupa garis lurus dengan bentuk persamaan sebagai berikut :

$$Y = aX + b \quad \dots\dots\dots (1)$$

dengan :

Y : persamaan garis lurus Y atas X

a : koefisien regresi merupakan koefisien arah dari garis regresi

b : koefisien yang merupakan titik potong dari garis regresi dengan sumbu tegak X (=variabel bebas)

Parameter teoritik yang dapat digunakan untuk mengukur hubungan linier antara variabel X dan Y adalah koefisien korelasi Pearson (R). Koefisien korelasi tersebut didefinisikan sebagai ⁽²⁾ :

$$R = \frac{\sum (X_i - X)(Y_i - Y)}{\sqrt{[\sum (X_i - X)^2][\sum (Y_i - Y)^2]}} \quad \dots (2)$$

Nilai residu adalah merupakan ukuran perbedaan antara nilai pengukuran dengan nilai dari persamaan regresi Y atas X. Simpangan baku dari nilai residu dapat dihitung dengan rumus :

$$\sigma_x = \sqrt{\left[\frac{\sum (X_i - X)^2}{(n-1)} \right]} \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\sigma_y = \sqrt{\left[\frac{\sum (Y_i - Y)^2}{(n-1)} \right]} \quad \dots\dots\dots (4)$$

Perhitungan koefisien regresi a dapat ditentukan berdasarkan nilai koefisien korelasi R dengan persamaan sebagai berikut :

$$a = R (\sigma_y / \sigma_x) \quad \dots\dots\dots (5)$$

Sehingga persamaan garis lurus Y pada X, yaitu persamaan untuk meramal Y jika X diketahui, menjadi :

$$Y = Y + R (\sigma_y / \sigma_x) (X - X) \quad \dots\dots\dots (6)$$

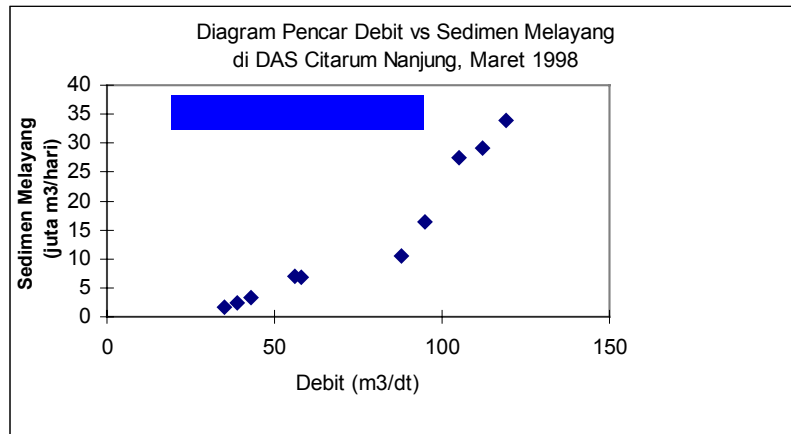
Apabila nilai koefisien korelasi tidak sama dengan +1 atau -1, maka perkiraan nilai Y jika X diketahui akan dapat berbeda dengan nilai yang terukur. Besarnya perbedaan atau kesalahan tersebut dinyatakan sebagai nilai kesalahan baku perkiraan (*standard error of estimate*). Nilai ini dapat digunakan untuk memperkirakan atau meramal Y jika nilai X diketahui. Nilai kesalahan baku perkiraan ini dapat dihitung dengan persamaan :

$$SEY = \sigma_y \cdot \sqrt{(1 - R^2)} \quad \dots\dots\dots (7)$$

2. HUBUNGAN DEBIT DAN KANDUNGAN SEDIMEN

Dengan semakin meningkatnya debit air sungai maka kandungan sedimen juga semakin besar. Berdasarkan diagram pencar hubungan debit dan kandungan sedimen dari DAS Citarum - Nanjung (Gambar 1), hubungan keduanya bukan merupakan

hubungan yang linier tetapi merupakan hubungan yang eksponensial ($Y = b e^{ax}$) atau hubungan yang berpangkat ($Y = b X^a$). Oleh karena itu pada tulisan ini akan dibandingkan antara kedua model regresi tersebut untuk memilih model regresi yang lebih sesuai untuk kasus data debit dan kandungan sedimen di DAS Citarum - Nanjung pada bulan Maret 1998.



Gambar 1. Diagram hubungan debit dan kandungan sedimen di DAS Citarum - Nanjung.

Contoh kasus adalah data debit dan kandungan sedimen DAS Citarum - Nanjung, pada bulan Maret 1998 (Tabel 2).

a, b : konstanta
 $Y_i > 0$

Tabel 2. Data debit dan kandungan sedimen DAS Citarum - Nanjung Maret 1998 ⁽³⁾

No.	Debit (m ³ /det)	Kandungan sedimen (juta m ³ /hari)
1.	35	1.73
2.	39	2.45
3.	43	3.31
4.	58	6.83
5.	56	6.99
6.	88	10.44
7.	95	16.36
8.	105	27.47
9.	112	29.06
10.	119	33.96

Sumber : DPMA, Laporan No. 246/HI-43/98

Persamaan (8) dapat diformulasikan menjadi persamaan linier fungsi (ln) sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ln Y &= \ln b e^{ax} \\ \Rightarrow \ln Y &= \ln b + \ln e^{ax} \\ \Rightarrow \ln Y &= \ln b + aX \ln e, \text{ karena } \ln e = 1 \\ \text{maka :} \\ \Rightarrow \ln Y &= \ln b + aX \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

Pers. (9) merupakan persamaan fungsi semi-logaritmik antara ln Y dengan X dan merupakan persamaan garis lurus dengan kemiringan a dan memotong sumbu ln Y di ln b. Untuk menyederhanakan penyelesaian persamaan tersebut, maka dilakukan transformasi sebagai berikut :

$$P = AX + B \dots\dots\dots(10)$$

dengan :

$$\begin{aligned} P &= \ln Y & A &= a \\ X &= X & B &= \ln b \end{aligned}$$

Persamaan (10) identik dengan persamaan (1) sehingga untuk perhitungan persamaan regresinya dapat digunakan persamaan (2) sampai (7).

2.1 Model Regresi Eksponensial

Bentuk umum model persamaan regresi eksponensial adalah :

$$Y = b e^{ax} \dots\dots\dots(8)$$

dengan :
Y : regresi eksponensial Y terhadap X (varabel tak bebas)
X : variabel bebas

Untuk contoh kasus data debit dan kandungan sedimen di DAS Citarum - Nanjung pada bulan Maret 1981, maka perhitungan pers. regresi eksponensialnya terlihat pada Tabel 3.

Tabel 3. Perhitungan persamaan regresi eksponensial debit dan kandungan sedimen DAS Citarum - Nanjung

No.	X _i	Y _i	P= lnY	(X - X)	(P - P)	(X - X) ²	(P - P) ²	(X-X)(P-P)
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	35	1.73	0.55	-40	-1.636	1600	2.6765	65.440
2	39	2.45	0.90	-36	-1.286	1296	1.6538	46.296
3	43	3.31	1.20	-32	-0.986	1024	0.9722	31.552
4	58	6.83	1.92	-17	-0.266	289	0.0708	4.522
5	56	6.99	1.94	-19	-0.246	361	0.0605	4.674
6	88	10.44	2.35	13	0.164	169	0.0269	2.132
7	95	16.36	2.79	20	0.604	400	0.3648	12.080
8	105	27.47	3.31	30	1.124	900	1.2634	33.720
9	112	29.06	3.37	37	1.184	1369	1.4019	43.808
10	119	33.96	3.53	44	1.344	1936	1.8063	59.136
Σ	750	-	2186	0	0	9344	10.297	303.360

Dari Tabel 3, diperoleh :

$$= 0.0332 X - 0.3040$$

$$X = \frac{750}{10} = 75 ; P = \frac{21,86}{10} = 2,186$$

Berdasarkan persamaan (2), maka koefisien korelasi (R) adalah :

$$R = \frac{303.36}{\sqrt{[(9344)(10.2970)]}} = \frac{303.36}{310.1837} = 0.978$$

Karena nilai koefisien korelasinya R = 0.978, maka menunjukkan adanya hubungan linier baik antara debit dan kandungan sedimen di lokasi pos duga air Nanjung dari DAS Citarum.

Simpangan baku nilai residu debit (X) dihitung berdasarkan persamaan (3) :

$$\sigma_X = \sqrt{(9344/9)}$$

Simpangan baku nilai residu P dapat dihitung berdasarkan persamaan (4) :

$$\sigma_P = \sqrt{(10.2970/9)} = 1.0696$$

Perbandingan nilai residu debit (X) dan P adalah :

$$\sigma_X / \sigma_P = \sqrt{(10.2970/9344)}$$

Kemiringan garis regresi dihitung berdasarkan persamaan (5) :

$$A = 0.978 \sqrt{(10.2970/9344)} = 0.0332$$

Sehingga persamaan regresi liniernya adalah

$$P = 2.186 + 0.0332 (X - 75)$$

Apabila ditransformasikan kembali menjadi model eksponensial, dengan :

$$\ln b = B$$

$$\ln b = -0.3040, \text{ maka } b = 0.7379, \text{ dan}$$

$$a = A = 0.0332,$$

maka persamaan regresi eksponensialnya adalah :

$$Y = b e^{aX}$$

$$Y = 0.7379 e^{0.0332 X}$$

Kesalahan baku perkiraan untuk memperkirakan nilai P jika debitnya (X) diketahui adalah :

$$SEP = 1.0696 [1 - (0.978)^2] = 0.2231.$$

Karena $\ln Y = P$, maka :

$$\ln SEY = SEP = 0.2231,$$

maka SEY = 1.25,

sehingga kesalahan baku perkiraan untuk memperkirakan sedimen jika debitnya diketahui adalah 1.25 juta m³/hari.

3.2 Model Regresi Berpangkat

Bentuk umum model persamaan regresi berpangkat adalah :

$$Y = b X^a \dots\dots\dots(11)$$

Persamaan (11) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan linier fungsi logaritma akan menjadi :

$$\log Y = \log b X^a$$

$$\Leftrightarrow \log Y = \log b + \log X^a$$

$$\Leftrightarrow \log Y = \log b + a \log X \dots\dots\dots(12)$$

dengan $Y_i > 0$ dan $X_i > 0$.

Selanjutnya persamaan (11) dapat ditransformasikan ke dalam bentuk persamaan regresi linier sederhana :

$$P = AQ + B \dots\dots\dots(13)$$

dengan :

$$P = \log Y \quad A = a$$

$$B = \log b \quad Q = \log X.$$

Persamaan (13) identik dengan persamaan 1, maka untuk perhitungan persamaan regresinya dapat digunakan persamaan (2) sampai (7) .

Untuk contoh kasus data debit dan kandungan sedimen di DAS Citarum -

Nanjung maka perhitungan persamaan regresi berpangkatnya terlihat pada Tabel 4.

Dari Tabel 4, diperoleh :

$$P = \frac{9,4916}{10} = 0,4992 \quad ; \quad Q = \frac{18,3484}{10} = 1,8348$$

Berdasarkan persamaan (2), maka koefisien korelasi (R) adalah :

$$R = \frac{0.8338}{\sqrt{[(0.3681)(1.9454)]}} = \frac{0.8338}{0.8462} = 0.985$$

Karena nilai koefisien korelasinya $R = 0.985$, maka menunjukkan adanya hubungan linier baik antara debit dan kandungan sedimen di lokasi pos duga air Nanjung dari DAS Citarum.

Tabel 4. Perhitungan persamaan regresi berpangkat debit dan kandungan sedimen DAS Citarum - Nanjung, Maret 1998

No.	P=logY	Q=logX	(Q-Q)	(P-P)	(Q-Q) ²	(P-P) ²	(Q-Q)(P-P)
1	2	3	4	5	6	7	8 (4x5)
1	0.2380	1.5441	-0.2907	-0.7112	0.0845	0.5058	0.2067
2	0.3892	1.5911	-0.2437	-0.5600	0.0594	0.3136	0.1365
3	0.5198	1.6335	-0.2013	-0.4294	0.0405	0.1844	0.0864
4	0.8344	1.7634	-0.0714	-0.1148	0.0051	0.0132	0.0082
5	0.8445	1.7482	-0.0866	-0.1047	0.0075	0.0110	0.0091
6	1.0187	1.9445	0.1097	0.0695	0.0120	0.0048	0.0076
7	1.2138	1.9777	0.1429	0.2646	0.0204	0.0700	0.0378
8	1.4389	2.0212	0.1864	0.4897	0.0347	0.2398	0.0913
9	1.4633	2.0492	0.2144	0.5141	0.0460	0.2643	0.1102
10	1.5310	2.0755	0.2407	0.5818	0.0579	0.3385	0.1400
Σ	9.4916	18.3484	0	0	0.3681	1.9454	0.8338

Simpangan baku nilai residu P dapat dihitung berdasarkan persamaan (3) :

$$\sigma_P = \sqrt{(1.9454/ 9)} = 0.4649$$

Simpangan baku nilai residu Q dapat dihitung berdasarkan persamaan (4) :

$$\sigma_Q = \sqrt{(0.3681/ 9)}$$

Perbandingan nilai residu P dan Q adalah :

$$\sigma_P / \sigma_Q = \sqrt{(1.9454/ 0.3681)}$$

Kemiringan garis regresi dihitung berdasarkan persamaan (5) :

$$A = 0.985 \sqrt{(1.9454/ 0.3681)} = 2.2644$$

Sehingga persamaan regresi liniernya adalah

$$P = 0.985 + 2.2644(Q - 1.8348)$$

$$\Rightarrow P = 2.2644Q - 3.1697$$

apabila ditransformasikan kembali menjadi model eksponensial, dengan :

$$\log Y = P \quad b = \log B$$

$$\log X = Q \quad A = a = 2.2644$$

maka :

$$\log Y = 2.2644 \log X - 3.1697$$

Sehingga persamaan regresi berpangkatnya adalah :

$$Y = b X^a$$

$$Y = 6.7655 \cdot 10^{-4} X^{2.2644}$$

Kesalahan baku perkiraan untuk memperkirakan nilai P jika nilai Q diketahui adalah :

$$SEP = 0.4669 [1-(0.985)^2] = 0.0802$$

Karena $\log Y = P$, maka :

$$\log SEY = SEP = 1.20,$$

sehingga kesalahan baku perkiraan untuk memperkirakan nilai kandungan sedimen (Y) jika debit diketahui (X) adalah 1.20 juta m³/hari.

3. KESIMPULAN

- a. Hubungan antara debit dengan kandungan sedimen untuk data DAS Citarum - Nanjung pada bulan Maret 1981 adalah :
Dengan analisis regresi eksponensial :

$$Y = 0.7379 e^{0.0332 X}$$

dengan :

Koefisien korelasi (R) = 0.978 dan
Kesalahan baku perkiraan (SEY) = \pm 1.25 juta m³/hari.

Dengan analisis regresi berpangkat :

$$Y = 6.7655 \cdot 10^{-4} X^{2.2644}$$

dengan :

Koefisien korelasi (R) = 0.985 dan
Kesalahan baku perkiraan (SEY) = \pm 1.20 juta m³/hari.

- b. Berdasarkan nilai koefisien korelasi dan nilai kesalahan baku perkiraan, maka analisis regresi berpangkat lebih sesuai dibandingkan dengan analisis regresi eksponensial untuk data kasus hubungan debit dan kandungan sedimen di DAS Citarum - Nanjung, Maret 1981.

DAFTAR PUSTAKA

1. Soewarno, 1995, *Hidrologi : Aplikasi Metode Statistik untuk Analisa Data*, Penerbit NOVA, Bandung.
2. Milton, J.S. and J.C. Arnold, 1990, *Introduction to Probability and Statistics : Principles and Applications for Engineering and The Computing Sciences*, McGraw-Hill Publication Co., New York.

3. Direktorat Penyelidikan Masalah Air (DPMA), 1998, *Discharge Measurement and Suspended Sediment Observation of Citarum River at Nanjung, Saguling and Palumbon*, Supporting Report No. 246/HI-43/81.
4. Damanhuri, E., 1995, *Statistika*, Jurusan Teknik Lingkungan, FTSP-ITB, Bandung.

RIWAYAT PENULIS

Mardi Wibowo lahir di Sragen pada 7 Oktober 1968, Menamatkan pendidikan S1 di Jurusan Teknik Geologi -UGM dan S2 di Jurusan Teknik Lingkungan-ITB. Saat ini bekerja sebagai peneliti di Pusat Pengkajian dan Penerapan Teknologi Lingkungan, BPPT.